

23

Calcul des périmètres, des aires et des volumes

Calculer le périmètre, l'aire et le volume des figures et des solides usuels.

01

Dans le plan : calcul des périmètres et des aires

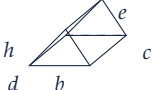
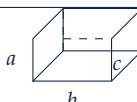
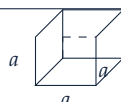
figure	dessin	Aire (A)	Périmètre (p)
Rectangle		$A = L \times \ell$ $A = \text{longueur} \times \text{largeur}$	$p = 2(L + \ell)$
Carré		$A = a \times a = a^2$ $A = \text{côté} \times \text{côté}$	$p = 4a$
Triangle rectangle		$A = \frac{a \times b}{2}$ $A = a \times b : 2$	$p = a + b + c$
Losange		$A = \frac{d \times D}{2}$ $A = d \times D : 2$	$p = 4a$
Triangle		$A = \frac{b \times h}{2}$ $A = b \times h : 2$ $A = \text{base} \times \text{hauteur} : 2$	$p = a + b + c$
Parallélogramme		$A = b \times h$ $A = \text{base} \times \text{hauteur}$	$p = 2(a + b)$
Disque		$A = \pi \times r \times r = \pi r^2$ Des arrondis de π sont $\pi = 3,14$; $\pi = 3,1416$	$p = 2\pi r$

Remarque

Les dimensions doivent être exprimées avec la même unité.

02

Dans l'espace : calcul des aires et des volumes

Prisme droit		$\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur du solide. L'aire latérale : $\mathcal{A} = (a + b + c + d + e) \times h$ Volume : $\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h$
Parallélépipède		L'aire latérale : $\mathcal{A} = 2(b + c) \times a$ Volume : $\mathcal{V} = a \times b \times c$
Cube		L'aire latérale : $\mathcal{A} = 4 \times a \times a = 4a^2$ Volume : $\mathcal{V} = a \times a \times a = a^3$
Cylindre de révolution		r est le rayon de la base et h est la hauteur du solide L'aire latérale : $\mathcal{A} = 2\pi \times r \times h$ Volume : $\mathcal{V} = \pi \times r^2 \times h$

03

Volume d'un prisme droit

Exemple 1

Calculer le volume de la figure ci-contre.

On constate qu'on a un prisme droit de base le polygone $DCBAE$, et $[AH]$ est la hauteur de ce prisme droit.

Soit $\mathcal{V}$ le volume de ce prisme. On sait que :

$$\mathcal{V} = (\text{aire de base}) \times (\text{hauteur}).$$

Soit $\mathcal{B}$ l'aire de la base $DCBAE$.

On a :

$$\mathcal{B} = \text{aire}(BCD) + \text{aire}(ABDE)$$

$$\mathcal{B} = \frac{25 \times 80}{2} + 60 \times 80$$

$$\mathcal{B} = 1000 + 4800$$

$$\mathcal{B} = 5800 \text{ cm}^2.$$

Par conséquent :

$$\mathcal{V} = 5800 \times 70$$

$$\mathcal{V} = 406\,000 \text{ cm}^3.$$

D'où, $406\,000 \text{ cm}^3$ est le volume de ce prisme droit.

04

Volume d'un cylindre

Exemple 2

Un verre cylindrique de diamètre 80 mm et de hauteur h contient de l'eau.

1. Calculer le volume d'eau sachant que 3 cm est la hauteur d'eau dans ce verre.
2. Calculer h sachant que la capacité du verre est 42 cl.

1) Volume d'eau :

On sait que :

$$\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h.$$

Calculons le rayon du disque :

$$r = \frac{80}{2} \text{ mm} = 40 \text{ mm} = 4 \text{ cm}.$$

Donc :

$$\mathcal{V} = 4 \times 4 \times \pi \times 3 = 48\pi \text{ cm}^3 \simeq 150,8 \text{ cm}^3.$$

2) Calcul de h la hauteur du verre.

On a :

$$42 \text{ cl} = 0,42 \text{ l} = 420 \text{ cm}^3.$$

Et $\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h$: le volume du verre cylindrique.

Donc :

$$\mathcal{V} = 4 \times 4 \times \pi \times h,$$

c'est-à-dire $16\pi h = 420$.

D'où :

$$h = \frac{420}{16\pi} \text{ cm} \simeq 8,35 \text{ cm}.$$

Exemple 3

Calculer le volume contenu dans la malle ci-dessous : longueur 1,10 m, largeur 80 cm, hauteur 60 cm.

1. La malle est composé d'un parallélépipède et d'un demi-cylindre.
2. On choisit le cm : $1,10 \text{ m} = 110 \text{ cm}$.
3. Le volume du cylindre de diamètre 80 cm est :

$$\mathcal{V}_1 = \pi \times 40^2 \times 110 \simeq 552\,920 \text{ cm}^3.$$

4. Le couvercle, qui est un demi-cylindre, a un volume de moitié soit $276\,460 \text{ cm}^3$.
5. Le volume du pavé droit est :

$$\mathcal{V}_2 = 60 \times 110 \times 80 = 528\,000 \text{ cm}^3.$$

6. Le volume contenu dans la malle est :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 \simeq 804\,460 \text{ cm}^3.$$