

3 APIC ■ Semestre 1 ■ Activités numériques

03

Racines carrées

Connaître la racine carrée d'un nombre réel positif, résoudre une équation du type « carré égal à un réel » et utiliser les opérations sur les racines carrées.

01

Racine carrée d'un nombre réel positif

Définition

La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif dont le carré égal à a .

On le note $\sqrt{a}$.

Donc, pour tout nombre positif a : $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.

Le symbole $\sqrt{\quad}$ se nomme radical.

Exemples :

- 1) $\sqrt{81} = 9$ car $9^2 = 81$
- 2) $\sqrt{0,04} = 0,2$ car $(0,2)^2 = 0,04$
- 3) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ car $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

02

L'équation $x^2 = a$ d'inconnue x

Propriété 1

Soit a un nombre réel donné.

- 1) Si $a > 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- 2) Si $a = 0$, alors l'équation $x^2 = 0$ admet une solution : 0.
- 3) Si $a < 0$, alors l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution.

Exemples :

- 1) Résolvons l'équation : $x^2 = 3$.
L'équation $x^2 = 3$ a deux solutions $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.
- 2) Résolvons l'équation : $x^2 = -9$.
L'équation $x^2 = -9$ n'a pas de solution car il n'existe pas de nombre réel dont le carré est -9 .

03

Opérations sur les racines carrées

1. Racine carrée d'un produit

Propriété 2

Soit a et b deux nombres réels positifs.

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad \text{et} \quad \sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}.$$

Autrement dit : La racine carrée d'un produit est égale au produit des racines carrées.

Exemples :

- 1) $\sqrt{5^2 \times 2} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
- 2) $\sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 18} = \sqrt{36} = 6$

2. Racine carrée d'un quotient

Propriété 3

Soit a et b deux nombres réels positifs ($b \neq 0$) :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}.$$

Autrement dit : La racine carrée d'un quotient est égale au quotient des deux racines carrées.

Exemples :

- 1) $\sqrt{\frac{100}{49}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{49}} = \frac{10}{7}$
- 2) $\sqrt{\frac{20}{45}} = \sqrt{\frac{4 \times 5}{9 \times 5}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

Attention

Pour $a > 0$ et $b > 0$, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$ ($a - b > 0$).

Exemples :

- 1) $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ et $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$
donc : $\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$.
- 2) $\sqrt{169} - \sqrt{144} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{169-144} = 13 - 12 = 1$
donc : $\sqrt{169-144} \neq \sqrt{169} - \sqrt{144}$.

3. Expression conjuguée

Propriété 3

Soit a et b deux nombres réels positifs :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad \text{et} \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}.$$

$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est l'expression conjuguée de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Exemples :

- 1) $\sqrt{2} - \sqrt{6} = \frac{2-6}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = \frac{-4}{\sqrt{2} + \sqrt{6}}$
- 2) $\frac{3}{\sqrt{7}-2} = \frac{3(\sqrt{7}+2)}{7-4} = \sqrt{7}+2$

04

À retenir

À retenir

Pour a et b réels positifs :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (b \neq 0) \quad \sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}.$$

Pour $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ a deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.