

15

Ordre des nombres rationnels et opérations

Comparer deux nombres rationnels, puis utiliser les règles qui relient l'ordre des nombres rationnels à l'addition et à la multiplication.

Feuille d'exercices

45 min

Nom : _____

Date : _____

01

Pratique — J'applique

Comparer deux nombres rationnels

Exemple 1 — Comparer les nombres $\frac{4}{3}x - \frac{5}{8}$ et $\frac{4}{3}x - \frac{1}{2}$

x est un nombre rationnel.

Comparer les nombres $\frac{4}{3}x - \frac{5}{8}$ et $\frac{4}{3}x - \frac{1}{2}$.

Méthode 1 — On détermine le signe de leur différence.

On a :

$$\begin{aligned}\left(\frac{4}{3}x - \frac{5}{8}\right) - \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{2}\right) &= \frac{4}{3}x - \frac{5}{8} - \frac{4}{3}x + \frac{1}{2} \\ &= \frac{-5}{8} + \frac{4}{8} \\ &= \frac{-1}{8}.\end{aligned}$$

Puisque $\frac{-1}{8}$ est un nombre négatif,

alors : $\left(\frac{4}{3}x - \frac{5}{8}\right) - \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{2}\right)$ est négatif, c'est-à-dire $\left(\frac{4}{3}x - \frac{5}{8}\right) - \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{2}\right) \leq 0$.

Donc : $\frac{4}{3}x - \frac{5}{8} \leq \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}$.

Méthode 2 — On utilise les propriétés des inégalités et des opérations.

On a : $\frac{-5}{8} \leq \frac{-4}{8}$ car $-5 < -4$.

Donc : $\frac{-5}{8} \leq \frac{-1}{2}$.

On ajoute $\frac{4}{3}x$ aux deux membres de cette inégalité.

Donc : $\frac{4}{3}x + \left(\frac{-5}{8}\right) \leq \frac{4}{3}x + \left(\frac{-1}{2}\right)$.

D'où : $\frac{4}{3}x - \frac{5}{8} \leq \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}$.

Encadrer des sommes et des produits

Exemple 2 — Encadrer $2a + 3b$, $-a$ et ab

a et b sont deux nombres tels que : $-3 \leq a \leq -2$ et $4 \leq b \leq 5$.

Déterminer l'encadrement de chacun des nombres suivants :

$$2a + 3b, \quad -a \quad \text{et} \quad ab$$

Encadrement de $2a + 3b$:

On a : $-3 \leq a \leq -2$ et $2 > 0$

Donc : $-6 \leq 2a \leq -4$ ①

Et $4 \leq b \leq 5$ et $3 > 0$

Donc : $12 \leq 3b \leq 15$ ②

De ① et ②, on déduit que : $-6 + 12 \leq 2a + 3b \leq -4 + 15$

D'où : $6 \leq 2a + 3b \leq 11$.

Encadrement de $-a$:

On a : $-3 \leq a \leq -2$

Donc : $-1 \times (-3) \geq -1 \times a \geq -1 \times (-2)$

$$3 \geq -a \geq 2$$

D'où : $2 \leq -a \leq 3$.

Encadrement de ab :

On a : $2 \leq -a \leq 3$ ($-a$ est positif)

Et : $4 \leq b \leq 5$ (b est positif)

Donc : $8 \leq -ab \leq 15$

D'où : $-15 \leq ab \leq -8$

Isoler l'inconnue dans un double encadrement**Exemple 3 — Trouver un encadrement de x**

x est un nombre rationnel tel que : $-1 \leq \frac{2x+3}{4} \leq 2$.

Trouver un encadrement de x .

Encadrement de x :

On a : $-1 \leq \frac{2x+3}{4} \leq 2$

Donc : $4 \times (-1) \leq 4 \times \left(\frac{2x+3}{4}\right) \leq 4 \times 2$ on multiplie chaque membre par 4

$$-4 \leq 2x + 3 \leq 8 \quad \text{on simplifie}$$

$$-4 - 3 \leq 2x + 3 - 3 \leq 8 - 3 \quad \text{on ajoute } -3 \text{ à chaque membre}$$

$$-7 \leq 2x \leq 5 \quad \text{on divise chaque membre par 2}$$

$$-\frac{7}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{5}{2}$$

Donc : $-3,5 \leq x \leq 2,5$.

02**Investissement — Réviser ton cours****Exercice 1**

Compléter les pointillés par : « $\leq$ » ou « $\geq$ » :

1) $a - b = \frac{5}{3}$, donc $a \dots\dots b$

2) $a - b = -11$, donc $a \dots\dots b$

- 3) $a - b = -6$, donc $a \dots\dots b$
 4) $a - b = 13$, donc $a \dots\dots b$

Exercice 2

Compléter par le nombre qui convient :

- 1) Si $x > 9$, alors $x + 2 > \dots\dots$
 2) Si $x \geq -8$, alors $x - 5 \geq \dots\dots$
 3) Si $x \leq \frac{2}{3}$, alors $3x \leq \dots\dots$
 4) Si $x > -5$, alors $-2x < \dots\dots$
 5) Si $-5x > 4$, alors $x < \dots\dots$
 6) Si $-\frac{1}{7}x \geq 0$, alors $x \leq \dots\dots$

Exercice 3

Compléter :

On a : $a \leq x \leq c$ et $b \leq y \leq d$

alors : $(a \leq x \text{ et } x \leq c)$ et $(b \leq y \text{ et } y \leq d)$

Donc : $\dots + \dots \leq \dots + \dots$ et $\dots + \dots \leq \dots + \dots$

Par conséquent : $\dots + \dots \leq x + y \leq \dots + \dots$

Application :

On donne : $2 \leq x \leq 3$ et $-3 \leq y \leq -1$

- 1) Encadrer $x + y$
 2) a. Encadrer $-x$ b. En déduire un encadrement de $y - x$

Exercice 4

Compléter :

- 1) Si $x > 3$, alors $x + 4 \dots\dots$
 2) Si $x \leq -3$, alors $x - 7 \dots\dots$
 3) Si $x \leq -4$, alors $2x \dots\dots$
 4) Si $x \leq 5$, alors $-3x \dots\dots$
 5) Si $-4x < 9$, alors $x \dots\dots$
 6) Si $7x < 2$, alors $x \dots\dots$

Exercice 5

Relier les inégalités équivalentes par une flèche :

$x + 5 < 0$ $-3x < -2$ $4x \leq 6$ $5x > 3$ $x \geq -2$	$x < -5$ $3x \geq -6$ $x \leq \frac{3}{2}$ $5x - 3 > 0$ $x > (-2) \left(-\frac{1}{3} \right)$
---	--

03

Investissement — Comparaison avec TICE

Exercice 6

1) Comparer x et y dans chacun des cas suivants :

a. $x = \frac{1}{(2016)^{-8}}$ et $y = \frac{1}{(2017)^{-8}}$

b. $x = -5 \times 2^{1436}$ et $y = -0,3 \times 2^{1437}$

c. $x = \frac{17}{16} - 10^{2017}$ et $y = \frac{27}{28} - 10^{2017}$

d. $x = \frac{-1435}{1436} \times \frac{2016}{2017}$ et $y = \frac{-1436}{1435} \times \frac{2016}{2017}$

2) Retrouver le rangement demandé en utilisant la fonction du tri d'un tableur tel qu'Excel.

Exercice 7

a et b sont deux nombres rationnels tels que :

$$a = 2x - \left(y + \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad b = \frac{5}{9} + y - \frac{1}{6} - 2(y - x).$$

Comparer les nombres a et b .

Exercice 8

x est un nombre positif non nul.

a. Comparer $\frac{x+1}{x}$ et $\frac{x}{x+1}$.

b. Comparer $\frac{4x+1}{2x}$ et $\frac{4x}{2x+1}$.

Exercice 9

a et b sont deux nombres rationnels tels que :

$$2 \leq a \leq 3 \quad \text{et} \quad -4 \leq b \leq 4.$$

Comparer $2a - b + 3$ et $-3a + 2b - 7$.

04

Investissement — Comparaison

Exercice 10

a et b sont deux nombres rationnels positifs non nuls tels que : $a < b$.

1) Déterminer le signe de $\frac{1}{b} - \frac{1}{a}$.

2) En déduire que : $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Exercice 11

Comparer les nombres x et y dans chacun des cas suivants :

1) $x = 2017 \times 10^{-54}$ et $y = 2016 \times 10^{-54}$

2) $x = 10^{54}$ et $y = \frac{10^{55}}{10,01}$

Exercice 12

a et b sont deux nombres rationnels tels que : $b - a = x^2$.

On donne : $X = a - 2$ et $Y = -2 + b$.

Comparer X et Y .

Exercice 13

a et b sont deux nombres rationnels tels que :

$$a - b < -5.$$

On donne : $x = a + 3^{57}$ et $y = b + 5^{50}$.

Comparer x et y .

05**Investissement — Encadrement****Exercice 14**

En mathématiques, la lettre e désigne un nombre important qui n'est pas un rationnel.

On sait que : $2,7 < e < 2,8$ et $0,8 < \cos 30^\circ < 0,9$.

Donner un encadrement de chacun des nombres suivants :

$$5e ; \quad -5e + 7 ; \quad \frac{e + \cos 30^\circ}{5} ; \quad e - \cos 30^\circ \quad \text{et} \quad e \times \cos 30^\circ.$$

Exercice 15

x et y sont deux nombres rationnels tels que :

$$-4 \leq x \leq -2 \quad \text{et} \quad 3 \leq y \leq 4.$$

1) Donner un encadrement de $x + 2y$.

2) En déduire un encadrement de $(x + 2y)^2$.

Exercice 16

Un terrain de sport a la forme d'un rectangle de 50 m de largeur et d'aire comprise entre 7500 m² et 7600 m².

Donner un encadrement de sa longueur.

Exercice 17

Donner un encadrement de la distance parcourue par une roue de voiture de 0,5 m de diamètre qui fait 150 tours et demi sachant que $3,14 < \pi < 3,15$.

06

Mon bilan

1) Indiquer la bonne réponse par A, B ou C :

Exercice B1

Comparer les nombres $-\frac{13}{7}$ et $-\frac{7}{4}$...

$$A : -\frac{13}{7} < -\frac{7}{4}, \quad B : -\frac{13}{7} = -\frac{7}{4}, \quad C : -\frac{13}{7} > -\frac{7}{4}.$$

Exercice B2

 $x - y = 3$, donc on peut en déduire que...

$$A : x < y, \quad B : x = y, \quad C : x > y.$$

Exercice B3

 $x - y = -8$, donc on peut en déduire que...

$$A : x < y, \quad B : x = y, \quad C : x > y.$$

Exercice B4

 $x > 4$, donc on peut en déduire que...

$$A : x + 3 < 1, \quad B : x + 3 > 7, \quad C : x + 3 > 12.$$

Exercice B5

 $x + 3 < 2$, donc on peut en déduire que...

$$A : x < -1, \quad B : x < 5, \quad C : x > 5.$$

Exercice B6

 $x < 6$, donc on peut en déduire que...

$$A : 2x < 8, \quad B : 2x < 12, \quad C : 2x > 12.$$

Exercice B7

 $x < 6$, donc on peut en déduire que...

$$A : -2x < 4, \quad B : -2x < -12, \quad C : -2x > -12.$$

Exercice B8

 $x \leq -5$ et $y \leq \frac{1}{2}$, donc on peut en déduire que...

$$A : x + y \geq -\frac{9}{2}, \quad B : x + y \geq 0, \quad C : x + y \leq -\frac{9}{2}.$$

2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :

	Savoir	Pratique
Ex : 1	Règle 1	
Ex : 2	Règle 1	
Ex : 3	Règle 1	
Ex : 4	Règle 2	
Ex : 5	Règle 2	
Ex : 6	Règle 4	
Ex : 7	Règle 5	
Ex : 8	Règle 3	

3) Exercices pour la remédiation voir R15 page : 199.

07 Approfondissement — Je recherche : encadrement

Exercice 18

Encadrer $\frac{13}{97}$ par les inverses de deux entiers consécutifs.

Exercice 19

Une température peut être mesurée en degrés Fahrenheit (F) ou en degrés Celsius (°C).

On donne la formule : $F = \frac{9}{5}C + 32$

- 1) En Janvier la température a varié entre -7 et 3 degrés Celsius.
Donner l'encadrement correspondant de la température exprimée en degrés Fahrenheit.
- 2) En Juin la température a varié entre 54 et 82 degrés Fahrenheit.
Donner un encadrement correspondant de la température en degrés Celsius.

Exercice 20

Donner un encadrement de x dans chacun des cas suivants :

- 1) $2 \leq -5 + 3x \leq 4$
- 2) $-3 \leq -6x + 1 \leq -1$
- 3) $\frac{2}{3} < \frac{x+4}{6} < \frac{2}{3}$

Exercice 21

a et b sont deux nombres rationnels tels que :

$$\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad -3 \leq b \leq -2.$$

- 1) a. Donner l'encadrement de $a + b$ et ab .
b. En déduire que : $3(a + b) \leq ab - 2$.
- 2) Encadrer $a - b$ et $a(4 + b)$.

Exercice 22

x et y sont deux nombres rationnels tels que :

$$5 \leq y \leq 7 \quad \text{et} \quad -2 \leq x \leq -1$$

Donner un encadrement de $x + 2y - 3$ et $2yx$.

Exercice 23

x et y sont deux nombres rationnels tels que :

$$-4 \leq x \leq -2 \quad \text{et} \quad 3 \leq y \leq 5.$$

On donne $A = xy + x + y$.

- 1) Donner un encadrement de A .
- 2) **a.** Montrer que $A = (x + 1)(y + 1) - 1$.
b. En déduire un autre encadrement de A .
- 3) Que remarque-t-on ?

Exercice 24

x et y sont deux nombres rationnels tels que :

$$4 \leq \frac{2}{3}x + 1 \leq 6 \quad \text{et} \quad -7 \leq 3y - 1 \leq -2$$

Sans déterminer les encadrements de x et y
donner un encadrement des deux nombres :

$$3y - \frac{1}{3}x \quad \text{et} \quad (2x + 3) \left(\frac{5}{3} - y \right).$$

Exercice 25

a , b et c sont des nombres rationnels tels que :

$$1 \leq a \leq 2 ; \quad -4 \leq b \leq -3 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{3} \leq 3c - 1 \leq \frac{2}{3}$$

Donner un encadrement de chacun des nombres suivants :

$$a - b ; \quad ab ; \quad (a + 3)(b + 5) \quad \text{et} \quad c.$$

Exercice 26

x et y sont deux nombres rationnels tels que :

$$-2x + 1 \leq 5x - 4 \leq -2x + 2 \quad \text{et} \quad 2 \leq \frac{1 - 2y}{2} \leq 3.$$

- 1) Montrer que : $\frac{5}{7} \leq x \leq \frac{6}{7}$ et $\frac{-5}{2} \leq y \leq \frac{-3}{2}$.
- 2) Donner un encadrement de chacun des nombres suivants : $x + y$, $x - y$ et xy .

Exercice 27

a et b sont deux nombres rationnels tels que :

$$a - b = -2 \quad \text{et} \quad a \leq -1 \quad \text{et} \quad b \geq \frac{1}{4}$$

- 1) Montrer que : $-\frac{7}{4} \leq a \leq -1$ et $\frac{1}{4} \leq b \leq 1$.
- 2) On pose : $E = a + b - \frac{1}{2}$ et $F = a + b + \frac{3}{2}$.
 - a. Donner un encadrement de E et F .
 - b. En déduire la comparaison de E et F de deux manières différentes.

08**Approfondissement — Je recherche : problèmes ouverts****Exercice 28**

a est un nombre rationnel tel que : $0 < a < 1$.
Montrer que : $a^2 < a$.

Exercice 29

24 cm et 18 cm sont les mesures de deux côtés d'un triangle. La longueur du troisième côté est un entier multiple de 6.
Quelles sont les valeurs possibles pour la longueur du troisième côté ?

09**Approfondissement — Je recherche : ranger****Exercice 30**

Ranger dans l'ordre croissant :

- 1) $-\frac{1}{10^2}$; -10^{-2} ; $\left(\frac{-1}{10^2}\right)^5$; $\frac{-10^7}{10^5}$
- 2) $-\frac{1}{2}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$
- 3) $\frac{4}{7}$; -3 ; $-\frac{2}{3}$; $\frac{5}{14}$; $-\frac{11}{23}$ et $\frac{11}{23}$.

Exercice 31

x est un rationnel non nul.

- 1) Montrer que : $\frac{x+3}{3} = 1 + \frac{x}{3}$.
- 2) Ranger dans l'ordre croissant les nombres :

$$\frac{2018}{2015} ; \frac{2020}{2017} ; \frac{2019}{2016}$$

10

Approfondissement — Je recherche : isoler x

Exercice 32

Isoler x au premier membre de chacune des inégalités suivantes :

1) $10 \geq x - 7$

3) $4 + x \leq 3x$

2) $\frac{1}{2} - x \leq \frac{5}{4}$

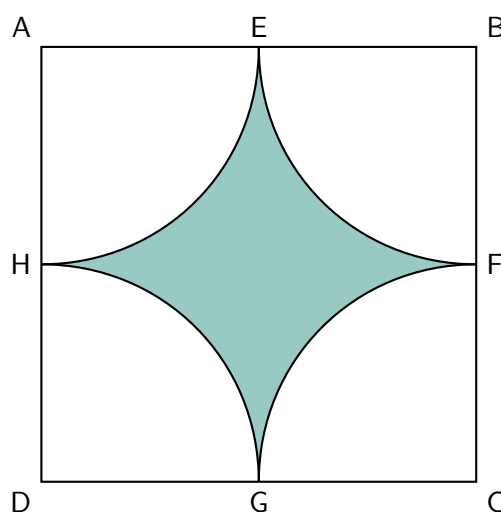
4) $\frac{5}{3}x - 1 < x + \frac{2}{3}$

11

Challenges

Exercice 33

$ABCD$ est un carré de 5 cm de côté. E , F , G et H sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.



- 1) Exprimer en fonction de π l'aire S de la partie coloriée en vert.
- 2) En déduire un encadrement de S sachant que :

$$3,14 < \pi < 3,15$$

Exercice 34

x et y sont deux nombres rationnels tels que :

$$xy < x^2 - y^2 < 2xy$$

Donner un encadrement de $(x - y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$

Exercice 35

a et b sont deux nombre rationnels tels que :

$$a + b = 1$$

- 1) Montrer que : $ab \leq \frac{1}{4}$.
- 2) Montrer que : $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 36

Soit a , b et c les longueurs des côtés d'un triangle.

Montrer que : $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

12**Dans la vie — Situations proposées au TIMSS****Exercice TIMSS**

Sara est allée à un parc de jeux. Elle dispose de 30 DH pour les dépenser.

Prix de l'entrée au parc :	5 DH
Prix d'une partie de jeux :	3 DH

Quelle est l'inégalité qui traduit le plus grand nombre de parties de jeux (P) que peut jouer Sara ?

A : $3P + 5 \leq 30$; B : $5P + 3 \leq 30$; C : $P + 3 + 5 \leq 30$; D : $3(P + 5) \leq 30$.