

06

Les quatre opérations sur les nombres rationnels

Calculer des expressions numériques sur les nombres rationnels, avec ou sans parenthèses, et calculer la valeur d'une expression littérale.

Feuille d'exercices

45 min

Nom : _____

Date : _____

01

Pratique — J'applique

Exemple 1 — Calculer le nombre rationnel A Calculer le nombre rationnel A :

$$A = \frac{2}{5} - \frac{7}{4} : \frac{21}{8}$$

Correction

$$A = \frac{2}{5} - \frac{7}{4} : \frac{21}{8} \quad \text{on effectue la division avant la soustraction}$$

$$A = \frac{2}{5} - \frac{7 \times 4 \times 2}{4 \times 7 \times 3} \quad \text{on simplifie avant d'effectuer les produits}$$

$$A = \frac{2}{5} - \frac{2}{3}$$

$$A = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} - \frac{2 \times 5}{3 \times 5} \quad \text{on réduit au même dénominateur}$$

$$A = \frac{6}{15} - \frac{10}{15} \quad \text{on termine les calculs}$$

$$A = -\frac{4}{15}$$

$$\text{Donc : } A = -\frac{4}{15}.$$

Exemple 2 — Calculer le nombre rationnel B Calculer le nombre rationnel B :

$$B = \frac{3}{5} - \left(\frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{4} \right) : \frac{3}{5}$$

Correction

$$B = \frac{3}{5} - \left(\frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{4} \right) : \frac{3}{5}$$

$$B = \frac{3}{5} - \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{4} \right) : \frac{3}{5} \quad \text{on effectue dans les parenthèses le calcul prioritaire}$$

$$B = \frac{3}{5} - \left(\frac{4}{20} + \frac{15}{20} \right) : \frac{3}{5} \quad \text{on réduit au même dénominateur}$$

$$B = \frac{3}{5} - \frac{19}{20} : \frac{3}{5}$$

$$B = \frac{3}{5} - \frac{19}{20} \times \frac{5}{3} \quad \text{on effectue le calcul prioritaire}$$

$$B = \frac{3}{5} - \frac{19}{4} \times \frac{1}{3} \quad \text{on pense à simplifier avant de calculer}$$

$$B = \frac{3}{5} - \frac{19}{12}$$

$$B = \frac{36}{60} - \frac{95}{60} \quad \text{on réduit au même dénominateur}$$

$$B = -\frac{59}{60}$$

$$\text{Donc : } B = -\frac{59}{60}.$$

Exemple 3 — Calculer le nombre rationnel C

Calculer le nombre rationnel C :

$$C = \frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{6}}{\frac{4}{15} + \frac{1}{25}}$$

Correction

$$C = \frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{6}}{\frac{4}{15} + \frac{1}{25}} = \frac{\frac{9}{12} - \frac{10}{12}}{\frac{6}{10} + \frac{5}{10}}$$

$$C = \frac{-\frac{1}{12}}{\frac{11}{10}} = -\frac{1}{12} \times \frac{10}{11} = -\frac{1}{6} \times \frac{5}{11}$$

$$\text{Donc : } C = \frac{5}{66}.$$

Exemple 4 — Calculer avec des lettres

a et b sont deux nombres rationnels.

On considère l'expression :

$$E = \frac{a + \frac{1}{2}}{b - \frac{3}{4}} : ab.$$

Calculer E pour : $a = \frac{3}{4}$ et $b = -\frac{5}{2}$.

Correction

On a :

$$E = \frac{a + \frac{1}{2}}{b - \frac{3}{4}} : ab \quad \text{et :} \quad a = \frac{3}{4} \text{ et } b = -\frac{5}{2}$$

Remplaçons a et b par leurs valeurs dans l'expression E .

$$E = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{-\frac{5}{2} - \frac{3}{4}} : \frac{3}{4} \times \frac{-5}{2}$$

$$E = \frac{\frac{3}{4} + \frac{2}{4}}{-\frac{10}{4} - \frac{3}{4}} : \frac{-15}{8}$$

$$E = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{-13}{4}} \times \frac{8}{-15}$$

$$E = \frac{5}{-13} \times \frac{8}{-15} = \frac{5 \times 8}{13 \times 5 \times 3}$$

$$\text{Donc : } E = \frac{8}{39}.$$

02

Investissement — Conduire un calcul

Exercice 1

Calculer et donner le résultat sous forme irréductible.

$$a = 3 - \frac{3}{5} \times 7 - \frac{2}{3} : (-2) \quad ; \quad b = \left(\frac{-9}{2} + \frac{1}{4} \right) \times \frac{-8}{3}$$

$$c = \left(\frac{-7}{3} + \frac{1}{4} \right) \times \frac{-8}{3} \quad ; \quad d = \frac{\frac{-3}{4} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{1}{6}}$$

Exercice 2

Calculer et simplifier si cela est possible.

$$a = \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{9} \right) : \left(\frac{7}{4} - \frac{1}{8} \right) \quad ; \quad b = \frac{5}{6} - \frac{1}{9} : \frac{7}{4} - \frac{1}{8}$$

$$c = \left(2 + \frac{2}{3} - \frac{4}{27} \right) \times \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9} \right)$$

$$d = \frac{-7}{12} \times \left[\left(\frac{3}{2} + \frac{10}{4} \right) - \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{3} \right) \right]$$

Exercice 3

Calculer et simplifier si cela est possible.

$$a = \left(1 - \frac{3}{5} + \frac{7}{10}\right) - \left(2 + \frac{4}{5} - \frac{9}{10}\right)$$

$$b = -\left(-2 + \frac{3}{4}\right) + \left[1 - \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$c = 2 + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right)\right] - \left[-\left(\frac{4}{3} + \frac{5}{4}\right)\right]$$

Exercice 4

Calculer les expressions suivantes et simplifier si cela est possible.

$$a = -\frac{9}{4} : \left(\frac{7}{3} - \frac{3}{4}\right) + \frac{11}{6}$$

$$b = \left(\frac{-7}{4} + \frac{5}{4} \times \frac{16}{3} - \frac{1}{2}\right) : \frac{7}{9} \quad ; \quad c = \frac{\frac{4}{5} - \frac{4}{3} \times \frac{5}{2}}{\frac{7}{6} - \frac{7}{3}}$$

$$d = \frac{\frac{4}{3} - \left(\frac{7}{2} - \frac{4}{3}\right)}{-1 - \frac{7}{3} \times \frac{9}{14}} \quad ; \quad e = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{-1}{2}}{\frac{1}{4} : \frac{-1}{2}}$$

$$f = \frac{\frac{17}{6}}{-8 + \frac{3}{2}} \quad ; \quad g = \frac{1 - \frac{5}{4}}{1 + \frac{4}{5}} : \frac{27}{4}$$

$$h = -\frac{3}{8} + \frac{3}{8} \times \left(1 - \frac{3}{2}\right) + 4 : \frac{-1}{3}$$

Exercice 5

Calculer :

$$a = \frac{1 - \frac{1}{4} + \frac{3}{8}}{1 + \frac{5}{6} - \frac{1}{2}} \quad ; \quad b = \frac{3 - \frac{7}{6} - 2 \times \frac{-3}{4}}{1 + \frac{25}{8} \times \frac{-1}{2}}$$

$$c = \frac{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}} \quad ; \quad d = 3 - \frac{3}{3 - \frac{3}{3 - \frac{3}{3 + \frac{3}{3}}}}$$

Exercice 6

Calculer et simplifier si cela est possible.

$$a = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{10}\right) \quad ; \quad b = -\frac{5}{8} + \frac{3}{8} : \left(1 - \frac{8}{3}\right)$$

$$c = \frac{3}{11} \times \frac{14}{31} \times \frac{33}{9} \times \left(\frac{-15}{10}\right) \times \left(\frac{-2}{3}\right)$$

Exercice 7

Calculer de deux manières différentes :

$$A = \left(\frac{-9}{2} + \frac{3}{8}\right) \times \frac{72}{13} \quad ; \quad B = \left(\frac{4}{5} - \frac{4}{3}\right) \left(\frac{1}{10} - \frac{2}{15}\right)$$

$$C = 54 \left(\frac{-9}{2} + \frac{7}{6} - \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad D = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) \left(6 - \frac{1}{6}\right)$$

Exercice 8

Calculer :

$$a = \frac{-2 + \frac{3}{4}}{8} \quad ; \quad b = \frac{\frac{13}{7} - 2}{\frac{3}{5}}$$

$$c = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{6}} \quad ; \quad d = \frac{3 - \frac{7}{10}}{2 + \frac{3}{5}}$$

Exercice 9

Calculer de manière astucieuse les expressions suivantes et simplifier si cela est possible.

$$a = \frac{-7}{2} + \frac{4}{5} - \frac{5}{3} + \frac{1}{2} - \frac{9}{5} + \frac{2}{3}$$

$$b = -\frac{9}{8} - \frac{9}{8} \times \frac{5}{3} + \frac{18}{16} - \frac{1}{6}$$

$$c = \frac{987}{654} \times \left(-\frac{987}{654}\right) - \frac{987}{654} \times \left(\frac{-170}{654}\right) + \frac{987}{654} \times \frac{817}{654}$$

Exercice 10

Effectuer les calculs suivants et donner le résultat sous forme simplifiée.

$$a = \frac{-28}{45} \times \frac{27}{35} \times \frac{25}{-6} \quad ; \quad b = \frac{-12}{49} \times \frac{-36}{-15} \times \frac{21}{-2}$$

$$c = \frac{-5}{9} - \frac{-1}{6} + \frac{7}{3} \quad ; \quad d = 4 - \frac{18}{11} \times \frac{22}{27}$$

$$e = \frac{1}{15} - \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{2} - \left(\frac{-7}{5}\right)\right)$$

$$f = \left(4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) + \left(-3 - \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right) - \left(-4 + \frac{1}{2}\right)$$

$$g = \left(\frac{-3}{4} + \frac{2}{3}\right) - \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(2 - \frac{1}{6}\right)\right] + \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{5}{6} - 1\right)\right]$$

Exercice 11

Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A = \frac{5}{6} - \frac{7}{6} \times \frac{3}{14} \quad ; \quad B = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \times \frac{9}{4} - \frac{1}{2}$$

$$C = \frac{4}{3} - \frac{5}{9} \times \frac{18}{25} + \frac{1}{25} \quad ; \quad D = \frac{3}{6} : \left(4 - \frac{1}{12}\right)$$

$$E = \left(\frac{3}{8} - \frac{4}{9}\right) : \frac{-5}{12} \quad ; \quad F = \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{6}\right) : \left(\frac{4}{9} - 1\right)$$

Exercice 12

Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

$$a = \left(4 + \frac{5}{6} \times \frac{12}{7}\right) : \left(\frac{-2}{7}\right) + \frac{7}{3} \quad ; \quad b = \frac{9}{5} - \frac{1}{3} : \left(\frac{4}{9} - \frac{2}{27}\right)$$

$$c = \frac{2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2}} \quad ; \quad d = \frac{\frac{7}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{16}{9}}{\frac{2}{6} + \frac{4}{6} - \frac{1}{3}}$$

$$e = 2 - \frac{1 - \frac{5}{4} + \frac{3}{2}}{1 - \frac{5}{4} - \frac{3}{2}} \quad ; \quad f = \frac{3}{2} \times \frac{5}{7} : \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} - 5 \times \frac{2}{15}$$

03**Investissement — Calculatrice****Exercice 13**

- 1) a. Vérifier avec la calculatrice que $999 \times 0,99$ est inférieur à 1000 ;
 b. Quel raisonnement vous permet de prévoir ce résultat sans faire le calcul avec l'aide de la machine.
- 2) a. Vérifier avec la calculatrice si $999 \times 1,1$ est plus grand que 1000 ;
 b. Même question pour $999 \times 1,01$; pour $999 \times 1,001$; pour $999 \times 1,0001$
 c. Quel raisonnement vous permet de prévoir les réponses aux questions précédentes sans effectuer le calcul avec l'aide de la machine ?

04**Mon bilan**

1) Indiquer la bonne réponse par A, B ou C :

Exercice B1

Le nombre $\frac{5}{4} \left(\frac{16}{9} - \frac{10}{15}\right)$ est égal à :

$$A : -\frac{5}{9}, \quad B : -\frac{5}{9}, \quad C : \frac{5}{9}.$$

Exercice B2

Le nombre $\frac{3}{7} \times \frac{2120}{2117} - \frac{3}{7} \times \frac{3}{2117}$ est égal à :

$$A : \frac{11}{7}, \quad B : \frac{3}{7}, \quad C : -\frac{3}{7}.$$

Exercice B3

Le nombre $\left(\frac{13}{23} - \frac{21}{31}\right) - \left(\frac{130}{23} - \frac{21}{31}\right)$ est égal à :

$$A : \frac{11}{7}, \quad B : \frac{3}{7}, \quad C : -\frac{3}{7}.$$

Exercice B4

Le nombre $\frac{7}{12} + \frac{5}{6} - \frac{7}{12} + \frac{3}{4} - \frac{13}{6}$ est égal à :

$$A : -\frac{7}{12}, \quad B : \frac{7}{12}, \quad C : -\frac{12}{7}.$$

Exercice B5

Le nombre $\frac{2}{3} \times \frac{7}{-5} \times \frac{-12}{56}$ est égal à :

$$A : -\frac{1}{5}, \quad B : \frac{5}{3}, \quad C : \frac{1}{5}.$$

Exercice B6

Le nombre $A = -\frac{3}{5} \left(\frac{-10}{9}\right) - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{4}{5}\right) - \frac{3}{4}$ est égal à :

$$A : \frac{2}{15}, \quad B : -\frac{2}{15}, \quad C : \frac{7}{15}.$$

Exercice B7

Le nombre $B = -\frac{2}{3} : \left(\frac{1}{2} - 5\right) + \frac{7}{4} \times \left(\frac{-8}{3}\right)$ est égal à :

$$A : -\frac{122}{27}, \quad B : -\frac{27}{122}, \quad C : \frac{122}{27}.$$

Exercice B8

Le nombre $C = \frac{\frac{5}{6} - \frac{4}{3}}{\frac{9}{25} + \frac{1}{2}}$ est égal à :

$$A : \frac{175}{29}, \quad B : -\frac{75}{29}, \quad C : -\frac{175}{129}.$$

2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :

	Savoir	Pratique
Ex : 1	Règle 1	
Ex : 2	Règle 1	
Ex : 3	Règle 2	
Ex : 4	Règle 3	
Ex : 5	Règle 4	
Ex : 6	Règle 5	
Ex : 7	Règle 6	
Ex : 8		Exemple 3

3) Exercices pour la remédiation voir R6 page : 198.

05 Approfondissement — Je recherche

Valeur d'une expression

Exercice 14

a , b et c sont des nombres rationnels tels que :

$$6a + 4b - 9c = \frac{132}{65} \quad \text{et} \quad abc = -\frac{528}{26}$$

Calculer F :

$$F = \frac{1}{12ab} - \frac{1}{18bc} - \frac{1}{27ca}$$

Exercice 15

Calculer :

$$A = \frac{3x-1}{x} + \frac{x}{3x+1} \quad \text{lorsque : } x = \frac{3}{2}.$$

$$B = (3x-1)(3-2y) \quad \text{lorsque : } y = \frac{-1}{6}.$$

$$C = 5b - 2 \times \frac{b-4}{3-b} \quad \text{lorsque : } b = -3.$$

$$D = 1 - \frac{2(a-7)}{3} \quad \text{lorsque : } a = -\frac{3}{4}.$$

Exercice 16

a , b et c sont des nombres rationnels non nuls tels que : $a - b = 4c$

Calculer G :

$$G = \frac{b}{4c-a} + \frac{a}{4c+b}.$$

Exercice 17

On donne : $a = -\frac{3}{4}$; $b = \frac{1}{3}$ et $c = -2$.

Calculer :

$$E = -2a + b - c \quad \text{et} \quad F = \frac{ab-2}{1+a}.$$

Exercice 18

On donne :

$$S = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{y + \frac{1}{y}} + \frac{1}{z + \frac{1}{z}}$$

Calculer S pour : $x = -\frac{1}{4}$ et $y = -3$ et $z = -\frac{2}{3}$.

Exercice 19

x est un nombre rationnel positif non nul.

Simplifier :

$$E = \frac{1-x}{x(x+2)} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad F = \frac{x + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$G = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$$

Exercice 20

a et b sont deux nombres rationnels non nuls tels que : $ab + 1 \neq 0$.

Simplifier E :

$$E = \frac{a - \frac{a-b}{1+ab-b}}{1 + \frac{(a-1)(a-b)}{1+ab-b}}$$

Exercice 21

a et b sont deux nombres rationnels non nuls tels que :

$$a \neq b \quad \text{et} \quad a \neq -b \quad \text{et} \quad ab \neq 1 \quad \text{et} \quad ab \neq -1.$$

Montrer que :

$$\frac{b + \frac{a-b}{1+ab}}{1 - \frac{(a-b)b}{1+ab}} - \frac{a - \frac{a-b}{1-ab}}{1 - \frac{a(a-b)}{1-ab}} = \frac{ab}{a+b}$$

Exercice 22

a est un nombre entier relatif positif non nul.

1) Montrer que :

$$\frac{\frac{1}{a+2} - \frac{1}{a+1}}{\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a}} = \frac{a}{a+2}.$$

2) En déduire la valeur de $E = \frac{\frac{1}{2020} - \frac{1}{2019}}{\frac{1}{2019} - \frac{1}{2018}}$.

Exercice 23

a , b et c sont des nombres rationnels tels que :

$$a \neq b, \quad b \neq c \quad \text{et} \quad c \neq a.$$

Calculer E :

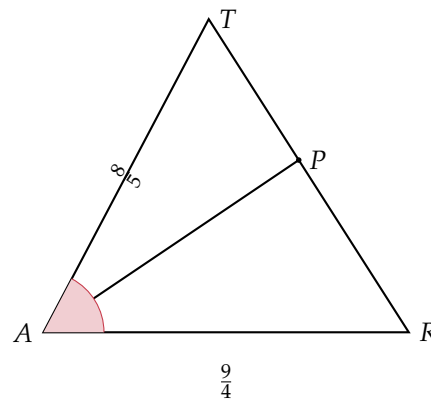
$$E = \frac{a}{(b-a)(c-a)} + \frac{b}{(c-b)(a-b)} + \frac{c}{(a-c)(b-c)}$$

Relier la géométrie au calcul numérique

Exercice 24

ART est un triangle tel que :

$$TA = \frac{8}{5} \text{ cm} \quad \text{et} \quad RA = \frac{9}{4} \text{ cm}$$



La bissectrice de l'angle $\widehat{RAT}$ coupe $[RT]$ en P . Calculer l'aire du triangle PAT sachant que l'aire du triangle ART est 36 cm^2 .

Exercice 25

Un rectangle a pour dimensions $\frac{17}{3}$ et $\frac{11}{3}$.

1) Calculer son périmètre et son aire.

2) Si on ajoute $\frac{5}{3}$ à chacune de ses dimensions, quelle est l'augmentation de son périmètre et celle de son aire ?

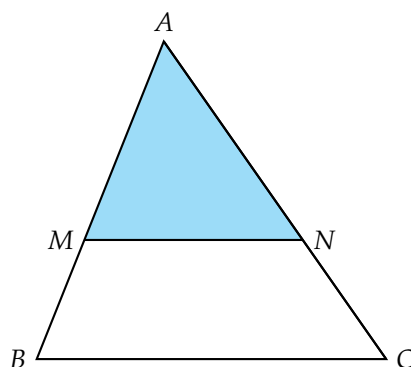
Exercice 26

ABC est un triangle tels que :

$$AB = \frac{24}{5} \quad ; \quad AC = \frac{27}{5} \quad \text{et} \quad BC = \frac{14}{4}$$

M est un point de $[AB]$ tel que : $AM = 3$.

La parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en N .



Calculer le périmètre du quadrilatère $MNCB$ sous forme fractionnaire.

06

Problème ouvert

Exercice 27

Soit a un nombre rationnel tel que :

$$\frac{2a}{a^2 - 2a + 1} = \frac{1}{4}$$

Calculer : $a + \frac{1}{a}$.

07

Challenges

Exercice 28

x est un nombre rationnel non nul tel que : $x - 1 \neq 0$ et $x + 1 \neq 0$.

On considère les nombres a et b tels que :

$$a = \frac{x}{x-1} \quad \text{et} \quad b = \frac{x}{x+1}$$

Montrer que : $\frac{a-b}{a+b} = \frac{1}{x}$

Exercice 29

n est un nombre entier naturel non nul.

1) Vérifier que :

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}$$

2) En déduire le calcul de S :

$$S = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{97 \times 99} + \frac{1}{99 \times 101}$$

Exercice 30

Calculer A et B :

$$A = \left(5 - \frac{100}{2020}\right) \left(5 - \frac{100}{2019}\right) \left(5 - \frac{100}{2018}\right) \times \cdots \times \left(5 - \frac{100}{1}\right)$$

$$B = (1 - 4) \left(1 - \frac{4}{9}\right) \left(1 - \frac{4}{25}\right) \left(1 - \frac{4}{49}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{4}{2021^2}\right)$$

Exercice 31

Soit x, y, z, a, b et c des nombres rationnels tels que :

$$\frac{a}{x-a} + \frac{b}{y-b} + \frac{c}{z-c} = 2$$

Calculer : $\frac{x}{x-a} + \frac{y}{y-b} + \frac{c}{z-c}$.

08**Situations proposées au TIMSS**

Un agriculteur dispose d'un récipient rempli d'eau pour irriguer ses plantations.

Il a utilisé $\frac{3}{4}$ de l'eau dans un seul champ. Après cela, il lui reste 20 litres d'eau dans le récipient. Quel a été le nombre de litres dans le récipient rempli ?